

CGcontents

「流体シミュレーションの新しい動向」

倉地 紀子

前回紹介したように、SIGGRAPH2002では、炎のシミュレーションや水面のシミュレーションなど、自然現象そのものがもつリアリズムをとことん追求した論文が発表されて話題となった。ところが、SIGGRAPH2003では、このような傾向の論文は影をひそめ、逆に、自然界の法則をできる限り単純化して、人間の創造性のもとに視覚化し、日頃人間が自然現象として目にすることができないようなリアリズムを作り出すことを目指したものが増えてきている。このことは、自然物を対象としたCGシミュレーションが、新たな段階に入ったことを意味しているともいえる。

そこで、今回と次回の2回にわたって、CGシミュレーションにみられる、このような新しい動きを、SIGGRAPH2003の論文をもとに紹介する。

Flows on Surfaces of Arbitrary Topology

1 回目は、CG流体シミュレーションの根本を築きあげたともいえる、ヨース・スタム氏 (Jos Stam) 氏が、SIGGRAPH2003で発表する、「Flows on Surfaces of Arbitrary Topology」を取り上げる。この論文は、これまで平面や空間を一律に分割したグリッド上でしか考えられていなかった流体シミュレーションを、任意のトポロジーをもつサーフェース上で可能にしたもので、その開発の動機を、スタム氏は、「流体のメカニズムを、現実の自然界には存在しないさまざまな形状のサーフェース上で実行、その結果がどのようになるかが見てみなかった」と説明している。

スタム氏といえば、まず1999年に発表された論文「Stable Fluids」で考案されたセミ・ラグランジアン法 (Semi-Lagrangian) で、もっとも広くその名を知られている。流体の動きを決定する運動方

程式は、質量保存の法則と運動量保存の法則を表す2つの微分方程式から成っている。一般的に工業シミュレーションで用いられている流体の運動方程式は、その密度や粘性も時間によって変化すると記述されているが、セミ・ラグランジアン法では、流体の密度や粘性は一定と仮定し、その方程式の記述が大幅に単純化されている。そして、こうして単純化された方程式は、4つの項からなる1つの方程式にまとめられる。

セミ・ラグランジアン法では、シミュレーションの各タイム・ステップをさらに4段階に分け、その各段階で、流体の運動方程式を構成する4種類の項のそれぞれの計算を独立して行う。第一段階では外力の影響を算出する。第2段階ではディフュージョンの影響を算出する。ディフュージョンとは、流体内の密度の偏りや流体がもつ粘性がひきおこす流れの乱れを指している。各点でのディフュージョンによる乱れの方角性は、流体がもつ物理的な特性によって決まるもので、各点における速度ベクトルの向きには依存しない。第3段階では対流の影響を算出する。対流によって流れが成長する方向性は、各点における速度ベクトルに依存している。このため、その計算工程は非常に不安定になる。第4段階は、質量保存を成り立たせるための計算が行われる。一般的に流体の質量保存は、流体内のどの領域をとっても、その境界面から流入する流体と流出する流体の収支がゼロになることを意味しており、この収支を表す物理量としては、ディバージェンス (divergence) というものが用いられる。

流体ベクトル場のディバージェンスとは、境界面を通過するすべてのベクトルに対して、境界面の法線方向成分を取り出して足し合わせたもので、その値は符号付き

のスカラー値となる。流体の密度が一定の場合には、質量保存はこのディバージェンスが常にゼロとなることを意味しており、これを数式化すると、速度ベクトルを仮想的な平面に射影する演算となる。そこで、第4段階では、第3段階までに算出されたベクトル値を、ディバージェンスがゼロとなる平面に射影する計算を行う。

上記の4段階の計算の中で、第3段階の対流の影響を算出する計算工程がもっとも不安定なため、タイム・ステップの細かさはこの第3段階の計算に合わせて選択される。タイム・ステップを密にとらないと、第3段階の工程で方程式が発散し、解が算出されない場合がでてくる。ところが、スタム氏は、着目する点における現在のベクトルをタイム・ステップひとつ分だけバック・トレースし、その位置における現在のベクトルが、着目する点が次のタイム・ステップにおいてもつベクトルになると考えて方程式を記述しなおし、これを解くという方法をとっている。次のタイム・ステップのベクトルをあらかじめ知って現在のベクトルを算出するため、解が発散することなく、大きなタイム・ステップを用いて高速に計算をすすめることができる。

これはかなり大胆な仮説に基づいた近似的解法といえるが、CGアニメーションとして見た場合、この近似計算によって十分はリアリティを作り出すことができる。このことは、流体のダイナミクスを単純化するというアプローチが、CGアニメーションにおいていかに有効かということを示し、その後のCG流体シミュレーションの発展の基礎を築いたともいえる。現在、流体力学を導入して作り出されているあらゆるアニメーションが、この解法を採用しているといっても過言ではない。その一方で、このような単純化は、流体のダイナミ

クスを、人間が設定したルールや創造性のもとに、新しい視覚的な効果を産む道具として用いることも可能にした。

実際のところ、スタム氏は、セミ・ランジアン法を考案した直後から、「CGにおいて流体シミュレーションはすっかりあたりまえのもの

となってきたが、流体シミュレーションを自然現象を真似る以外の方向性、たとえばもっとアーティスト的な表現方法にも導入できるようにしていきたい。アーティストがもっと手軽に用いることができるようになると思う。サーフェース上でインタラクティブに、動きのあるテクスチャを扱えるようにすることにも興味がある」とも語っており、任意のトポロジー上で展開される流体シミュレーションは、このような意図を反映したものとなっている。

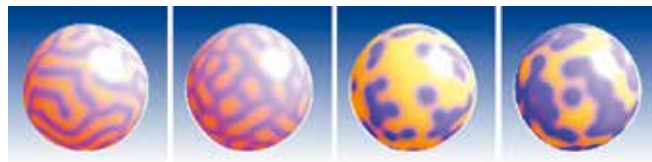
Catmull-Clark Surface

一方、スタム氏は、サブディビジョン・サーフェースの研究においても、大きな成果を残している(注)。サブディビジョン・サーフェースの一種であるカットマル・クラーク・サーフェース (Catmull-Clark Surface) では、曲面全体は4角形のパッチに分割されている。通常、ひとつの頂点には4つのパッチが連結しているが、サーフェースの形状によっては、ひとつの頂点に連結しているパッチの数が4でない場合もあり、このような頂点は特異点 (extraordinary point) とよばれている。特異点のないカットマル・クラーク・サー

動きのあるテクスチャ

アニメータがリアルタイムに動きのあるテクスチャを作り出せるようにすることも、目的の1つとなっていた。流体以外のダイナミクスを任意のトポロジーをもったサーフェース上で展開することが今後の課題だという。

セミ・ラグランジアン法を用いた流体の運動方程式を、より一般化した Diffusion-Advection というダイナミクスによってテクスチャを算出したもの。

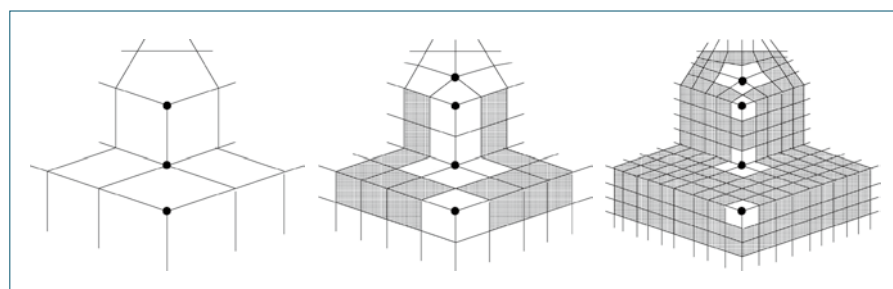


フェースは、Bスプライン・パッチと同義で、サーフェースを構成するひとつのパッチは、隣接するパッチの16個の頂点をコントロール・ポイントとし、パッチ内のローカル座標値 (u,v) を変数とする多項式となっている。この関数を行列の形であらわしたものはサブディビジョン・マトリックス (subdivision matrix) とよばれる。また、上記の多項式の中で、コントロール・ポイントの係数をあらわす関数はベシス・ファンクション (eigenbasis function) とよばれる。

ベシス・ファンクションは、パッチ内のローカル座標値 (u,v) に3D空間上のワールド座標値を対応させる、無限回微分可能な関数となっている。再分割は、u方向とv方向のそれぞれのBスプラインに対して、そのコントロール・ポイントの midpoint に新しいコントロール・ポイントを挿入することによって行われ、これによって1つのパッチは4つに分割される。この再分割を繰り返すことによって滑らかな曲面が生成される。ところが、特異点の近傍ではこの方法によって曲面を滑らかにすることができない。このため、特異点もふくめた領域全体を滑らかにするためには、特異点を中心とした「穴」が目立たなくなるまで再



さまざまなトポロジー上の流体



カットマル・クラーク・サーフェースの特異点連結しているパッチの数が4でない頂点は特異点とよばれる。特異点を含まないパッチは、再分割によって、各エッジの midpoint にコントロール・ポイントがひとつずつ挿入される。特異点の近傍では、このような再分割によって曲面を滑らかにすることができない。



ヨース・スタム (Jos Stam)
MAYAのサブディビジョン・サーフェースや流体シミュレーションなどの機能のベースも同氏によって構築されている。

バーチャルな 流体シミュレーション

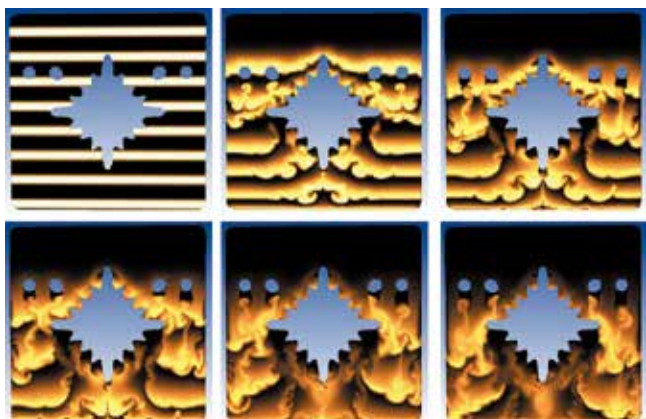
自然現象を模倣するだけでなく、人間が意図的に与えた条件や創意工夫を反映することのできる、新しい流体シミュレーションの可能性が目指された。

セミ・ラグランジアン法では、密度は一定として方程式を解くが、その結果算出された対流の影響を密度にも反映させて、密度の変化を作り出す。

この論文では、密度の変化を色の濃度として表したテクスチャをGPUレンダリングによってサーフェースに加えている。



回転する球面上で流体シミュレーションを行ったもの。コリオリ力（回転を引き起こす力）の影響が加えられている。



流れのディフュージョンの方向性をあらわす成分（anisotropy）を抽出して表示したもの。



流体シミュレーションに重力の影響を加えたもの



複雑な境界をもった曲面上で、密度を重力方向に変化させて流体シミュレーションを行った。

分割を繰り返す必要があった。また、特異点ではスカラー値やベクトル値を正しく定義することができないため、特異点を含むキャットマル・クラーク・サーフェース上で力学的な計算を考えることも難しかった。

この問題を解決するには、B スプライン・パッチのベース・ファンクションを拡張して、特異点を含むパッチにも対応したベース・ファンクションを作り出す必要がある。そこでスタム氏は、特異点を一つだけ含むパッチに着目し、このパッチに隣接した3つのB スプライン・パッチのベース・ファンクションを足し合わせて、特異点を含むパッチに対応した新しい形のベース・ファンクションを作り出すことを考えた。そして、この新しいベース・ファンクションを、その形が再分割によって変わることがないように定義するため、3つのB スプライン・パッチのベース・ファンクションを、それぞれのサブディビジョン・マトリックスの固有値と固有ベクトルを用いて書き直した。

固有ベクトルをサブディビジョン・マトリックスで変換したものは、固有ベクトルを固有値でスカラー倍したものとなる。このため、再分割によって生成されたパッチのベース・ファンクションは、分割前のパッチを定義していた3つのベース・ファンクションのそれぞれを、対応した固有値でスカラー倍したものによって定義できる。このように考えると、N回再分割を行ったパッチのベース・ファンクションは、最初の再分割でつくりだされたベース・ファンクションに、対応する固有値の(N-1)乗を掛け合わせてものによって定義できる。

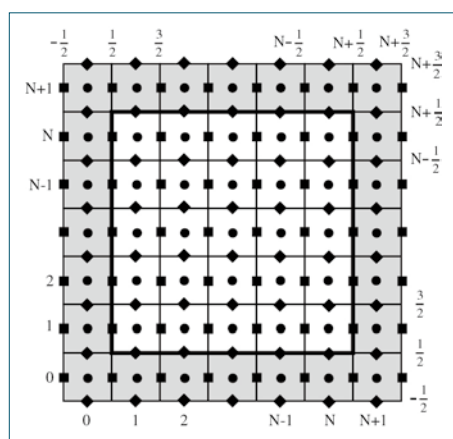
これはベース・ファンクションの形を変えないというだけでなく、もともになるベース・ファンクションや固有値を作り出すために最初の1回だけ再分割を行えば、その後は、このベース・ファンクションに固有値のべき乗を掛けたものを用いて、任意の回数再分割したものに相当するパッチを、実際に分割を行わずに生成できるという利点も生んだ。定義上、この新し

いベース・ファンクションは無限回微分可能で、特異点を含んだパッチにも対応している。任意のトポロジーをもつサーフェース上の流体シミュレーションは、このようなカットマル・クラーク・サーフェースのベース・ファンクションを導入することによって可能となった。

速度ベクトル

流体シミュレーションでは、領域内の異なった地点における速度ベクトルが比較され曲面上で流体シミュレーションを考える場合、曲面の各点における速度ベクトルはその点の接平面上で定義されるが、それぞれの点においてその接平面は異なっている。曲面上の各点における速度ベクトルを正確に比較するには、各点における接平面同士の関係に大域的な一貫性をもたせる必要がある。

通常このような場合、曲面をパラメータ化する方法が用いられる。これは、曲面上の各点の座標を、2つの実数変数によって記述することを意味している。これら2つ



グリッドへの分割

ひとつのパッチをグリッド・セルに分割したもの。各セルの中心には、外力や密度などのスカラー値が(丸印)、各セルの辺の中点には速度の u 方向成分(4角印)と v 方向成分(菱形印)が設定される。一番外側のグリッドには、隣接したパッチで算出された物理量を用いて、流体の運動方程式を解くために必要な境界条件が設定される。

らわすセルを配列している。この境界部分には隣接したパッチで算出された物理量を用いて境界条件が設定される。そして、これらのグリッド・セルを用いて、2次元平面上の場合と同様に流体の運動方程式を解いていく。ただ、ここで注意すべき点が2つある。

流体の運動方程式を解く場合、パッチ内の1点における速度を算出するために、そのパッチと隣接した他のパッチ内の流体の速度を参照する場合がある。この場合には、他のパッチ内で算出された速度を座標変換して用いる必要がある。このため、パッチ同士の境界における座標変換をあらかじめ把握しておく必要がある。ただ、ここで考えられているサーフェースでは、パッチ同士のつながりは4通りに限定されており、その座標変換も、パッチ間のつながり方に応じて座標軸の向きを反転させるだけにとどめることができる。

もうひとつ注意すべき点は、ベース・ファンクションを用いたパラメータ化によって生じるサーフェースの「歪み (distortion)」だ。ベース・ファンクションは、 (u, v) 平面上の正方形の領域を、3次元空間上の曲面に変形する関数とも考えられ、その変形の度合いが大きな部分では歪みが生じる。各点における変形の度合い

の実数変数がパラメータとよばれる。ただ、任意のトポロジーをもつ曲面に対して、曲面全体にわたるパラメータを導入してサーフェースを定義することは非常に難しい。ところが、前述したカットマル・クラーク・サーフェースのベース・ファンクションを用いると、任意のトポロジーをもったキャットマル・クラーク・サーフェースをパラメータ化し、そのどの点においても速度や加速度を正しく定義することができる。

そこで、ここでは、対象となるサーフェースをカットマル・クラーク・サーフェースとして生成し、その各パッチを上記のベース・ファンクションを用いて均一なグリッド・セルに分割する。各グリッド・セルの中心点には密度、粘性、外力、その点におけるベース・ファンクションの値などが設定され、グリッド・セルの各辺の中点には速度が設定される。また、各パッチの外側に、さらに1列ずつ境界をあ

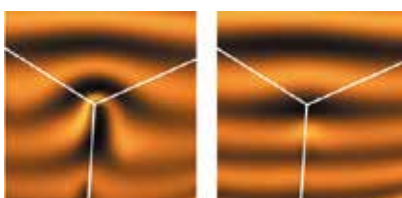
パラメータ化による歪み

パラメータ化をあらわすベース・ファンクションは、 (u, v) 平面上の正方形の領域を、3次元空間上の曲面に変形する関数とも考えられ、その変形の度合いが大きな部分では歪みが生じる。歪みの大きさは、変形の度合を表す行列の絶対値によって判断される。(変形の度合を表す行列の各成分は、ベース・ファンクションの x 、 y 、 z 成分のそれぞれを、 u 方向と v 方向に微分して足し合わせた値となっている)



トポロジーの違うキャットマル・クラーク・サーフェースをパラメータ化し、変形の度合いの大きさ(行列の絶対値)を色の濃さで表示したもの

歪みの発生を抑えるため、流体の運動方程式の中でサーフェースの勾配をあらわす成分 (gradient) 変形の度合を表す行列の逆行列を掛けて計算を行う。左は、歪みの補正を加えずに流体シミュレーションを行ったもの。中心部分に大きな歪みが生じている。右は、歪みの補正を加えて同じシミュレーションを行ったもの。歪みがかなり抑えられている。若干まだ歪みが残っているが、グリッドをある程度細かくすると、この方法で歪みはほとんど消すことができる。



は行例であらわされ、行列の各成分は、ベース・ファンクションの x 、 y 、 z 成分のそれぞれを、 u 方向と v 方向に微分して足し合わせた値となっている。そして、この行列の逆行列が、歪みを補正する行列と考えられる。

流体シミュレーションの計算を理想的に行うためには、この幾何学的な歪みを取り除いたサーフェース上で計算を行う必要がある。このため、ここでは、流体の運動方程式の中で曲面の勾配をあらわすグラディエント (gradient) という成分に、上記の歪みを補正する行列を掛け、運動方程式そのものを書き換えて計算を行っている。ここでは、セミ・ラグランジアン法を導入して単純化された方程式の解法が用いられる。

セミ・ラグランジアン法のそれぞれの工程の計算式を、前述した歪みを補正する計算を加えて書き換えた場合、第3の工程を除いては、書き換えた式をそのまま解くことができる。そして、第3の工程の場合には、速度ベクトルの u 方向成分と v 方向成分のそれぞれに、歪みを補正する行列の成分を用いて重み付けを行って足し合わせ、新しい u 方向成分と v 方向成分をもつベクトル場を作り出している。

そして、こうして生成された新しい速度ベクトルによって方程式の中の速度ベクトルを置き換えると、それは歪みを補正して書き換えられる前の式とまったく同じ形になり、バック・トレースを用いた考え方もそのまま導入することができた。任意のトポロジー上の流体の計算を可能にした最大の要因はここにあったという。ただし、この工程では、バック・トレースした軌跡が隣接したパッチにまたがるケースが多く、このような場合には、前述したような境界における座標変換を考慮して計算を行う必要がある。

このように、この論文ではキャットマル・クラーク・サーフェースとセミ・ラグランジアン法の両者の利点を最大限に生かし、逆にその欠点を打ち消しあうような工夫が随所で凝らされており、サブディビジョン・サーフェースと流体シミュレーションとの融合という意味でも、大きな可能性を示したものとなっている。

注) 「Exact Evaluation of Catmull-Clark Subdivision Surfaces At Arbitrary Parameter values」(Proceedings of Siggraph 198, Jos Stam)

Noriko Kurachi